Lycée M^{ed} Reda Sloaui
Centre des classes préparatoire
Agadir
Année scolaire : 2004/2005

Devoir libre $n°1$
à rendre le 11/10/2004

Exercice 1

Résoudre dans **C** les équations :

1. $z+2\bar{z}=4+i$
2. $4z^2+|z|^2-3=0$.

Exercice 2

1. Trouver une formule sommatoire pour la somme :

$$(x)=1+\mathtt{C}_n^1\cos(x)+\mathtt{C}_n^2\cos(2x)+...+\mathtt{C}_n^n\cos(nx)$$

(x est un réel quelconque et n un entier naturel non nul)

2. En déduire les solutions de l'équation : $U(x)=0$.

Exercice 3

1. Résoudre dans **R** l'équation :

$$(1)\quad \cos 3x=\tfrac{1}{2}$$

En exprimant $\cos 3x$ en fonction de $X=\cos x$, en déduire que les nombres

$$X_1=\cos\tfrac{\pi}{9},\quad X_2=\cos\tfrac{7\pi}{9},\quad X_3=\cos\tfrac{13\pi}{9}$$

sont des solutions de l'équation :

$$(2)\quad 8X^3-6X-1=0$$

2. Démontrer que, pour tout X réel, on a :

$$(3)\ 8X^3-6X-1=8(X-X_1)(X-X_2)(X-X_3)$$

3. À l'aide de l'égalité (3) et en développant le deuxième membre, déduire les valeurs numériques de :

$$A=\cos\tfrac{\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}+\cos\tfrac{13\pi}{9}$$
$$B=\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}\cos\tfrac{13\pi}{9}+\cos\tfrac{13\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9}$$
$$C=\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9}\cos\tfrac{13\pi}{9}$$

Exercice 4

1. Soit a un nombre réel tel que : $|a| < 1$. On considére la suite $(na^n)_{n\geq 1}$.
   a) On remarque que si $|a| < 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|a| = \frac{1}{1+\alpha}$. Montrer que :
   $$|a^n| < \frac{2}{n(n-1)\alpha^2}, \forall n \geq 2.$$
   b) En déduire que : $n\,|a^n| < \frac{2}{(n-1)\alpha^2}$, calculer la limite de la suite $(na^n)_{n\geq 1}$.
2. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :
   $$\forall n \geq 1,\ \ u_n = n(\tfrac{2}{3})^n + n^2 \sin(\tfrac{\pi}{2^n})$$
   (On rappelle que : $0 \leq \sin(x) \leq x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

Exercice 5

1. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$
   a) Montrer que : $0 \leq u_n < 1, \forall n \geq 0$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone.
2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :
   $$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1},\ \ n \geq 0.$$
   a) Montrer que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
   b) Calculer u_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n->+\infty} u_n$.

••••••••••••